**1**

**Определение функции**

Это соответствие между элементами множеств D и E, установленное таким правилом, что всем числам из множества D сопоставлено единственное число из множества E

**Обратная функция**

Это исходная функция с обращенной зависимостью, то есть каждому числу из множества E сопоставляется число из множества D

**Сложная функция**

Это функция от функции

**Ограниченная и неограниченная функция**

Если для функции можно подобрать такое число, больше которого не найдется среди значений функции, то данная функция будет ограниченной сверху

Если для функции можно подобрать такое число, меньше которого не найдется среди значений функции, то данная функция будет ограниченной снизу

Если выполняются оба предыдущих условия, то функция считается ограниченной

Если ни одно из этих условий не выполняется, то функция считается неограниченной

**Элементарная функция**

Это функция, полученная из конечного числа основных элементарных функций с помощью арифметических операций и операций композиции (то есть, вложения)

**Основные элементарные функции**

Степенные, х и а – любое действительное число

Показательные, а ≠ 1, a > 0, x – любое действительное число

Логарифмические, а ≠ 1, a > 0, x > 0

Тригонометрические, для косинуса и синуса х – любое действительное число, для тангенса x ≠ 90° + 180°n, для котангенса x ≠ 180°n

Обратные тригонометрические, для арксинуса и арккосинуса |x| < 1, для арктангенса и арккотангенса х – любое действительное число

**2**

**Предел последовательности**

Число а называется пределом последовательности, а сама последовательность называется сходящейся, если для любого положительного числа Е (по своей сути, это расстояние) найдется такой номер члена последовательности, начиная с которого расстояние от каждого следующего члена последовательности до числа а будет меньше Е

**Основные понятия предела**

Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0

Последовательность называется бесконечно большой, если для любого положительного числа E найдется такой номер члена последовательности, начиная с которого каждый следующий член последовательности по модулю будет больше Е. Если при этом все следующие члены положительны, то предел равен +∞, а если отрицательны, то -∞

Число а называется предельной точкой, если для любого положительного числа Е можно найти бесконечное количество членов последовательностей, расстояние от которых до точки а будет меньше Е

Эпсилон-окрестностью точки а U(a, E) называется интервал вида (a - E; a + E).

Можно дать новое определение пределу: точка а называется пределом последовательности, если для любого положительного числа Е найдется такой номер члена последовательности, начиная с которого все следующие члены последовательности будут находиться в окрестности U(a, E)

**Теорема о единственности предела, док-во**

Допустим, у последовательности есть предел a и предел b. Тогда по мере уменьшений числа Е, а следовательно, и сужения окрестностей U(a, E) и U(b, E) при каком-то Е данные окрестности перестанут пересекаться. Но по определению предела для данного Е должен найтись номер члена последовательности, начиная с которого все следующие члены последовательности должны находиться в окрестностях предела. Но так как окрестности не пересекаются, члены должны одновременно находиться в разных местах, что невозможно

**Ограниченность сходящейся последовательности, док-во**

Возьмем любое положительное число Е, для него найдется номер N, начиная с которого все следующие члены последовательности будут находиться в эпсилон-окрестности предела. Однако вне этой окрестности будет находиться от 0 до N-1 предыдущих членов последовательности, при этом их будет конечное число, а значит, среди них можно найти максимальное и минимальное, что и будет являться границами последовательности

**3**

**Теорема о пределе встречных последовательностей, док-во**

Теорема гласит о том, что если xn ≤ yn ≤ zn, предел xn ­и zn равен а, то этому же числу равняется и предел yn. Докажем это. Возьмем окрестность U(a, E1) для последовательности zn (или xn) такую, что в нее не будет входить хотя бы один из членов zi взятой последовательности. По определению предела начиная с какого-то n1 все следующие члены взятой последовательности будут находиться в U(a, E1). Так как член zi не входит в эту окрестность, он не может идти после zn1, следовательно, он идет перед ним. Другими словами, начиная с n1 все следующие члены zn будут находиться к числу а ближе, чем zi. Возьмем окрестность U(a, E2), которая будет меньше U(a, E1) и в которую не будет входить член zj, идущий после zn и, следовательно, входящий в U(a, E1). Тогда по определению предела начиная с какого-то n2 все следующие члены последовательности будут в ходить в окрестность U(a, E2). Аналогично логике выше можно сказать, что все члены, идущие после zn2, будут находиться к числу а ближе, чем zj. Так можно продолжать бесконечно долго. Исходя из этого, следует, что по мере сужения окрестности последовательности zn или xn в какой-то момент начиная с какого-то члена все следующие члены выбранной последовательности будут находиться ближе к пределу, чем один из предыдущих. То есть границы, в которых сможет находиться yn, в этот момент приблизятся к числу а и больше никогда не отдалятся от него. Чем больше n мы будем брать, тем ближе к числу а будут находиться границы, в которых будет находиться член последовательности yn, так как исходя из выведенной закономерности, границы будут лишь сужаться. Значит, для любого положительного Е найдется такой номер n члена последовательности yn, начиная с которого все следующие члены этой последовательности будут находиться в границах, находящихся еще ближе к числу а, чем границы yn, и при этом эти границы будут входить в окрестность U(a, E). Упростив вышесказанное, для любого положительного Е найдется такой такое номер члена последовательности yn, начиная с которого все следующие члены будут находиться в окрестности U(a, E). Это является определением предела а для последовательности yn.

**Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности**

Если последовательность монотонно возрастает (то есть каждый следующий член больше предыдущего) и ограничена сверху, то она имеет предел, равный минимально возможной точке, которая будет больше каждого члена последовательности.

Если последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то она имеет предел, равный максимально возможной точке, которая будет меньше каждого члена последовательности.

Если последовательность монотонно возрастает и не ограничена сверху, то ее предел равен +∞.

Если последовательность монотонно убывает и не ограничена снизу, то ее предел равен -∞.

**Теорема о вложенных отрезках**

Любая система вложенных отрезков (каждый отрезок содержит в себе следующий отрезок), длины которых стремятся к нулю, имеет единственную точку

**4**

**Фундаментальная последовательность**

Это последовательность, в которой для любого положительного числа Е найдется такой член последовательности, начиная с которого расстояние между любой парой следующих членов будет меньше Е

**Фундаментальная последовательность ограничена, док-во**

Зададим любое Е > 0, для него по определению фундаментальной последовательности найдется номер члена N, после которого расстояние между любой парой следующих членов будет меньше Е, то есть

|xn - xm| < E, n > N, m > N.

Выберем любое подходящее xm и раскроем модуль:

-E < xn - xm < E;

xm - E < xn < xm + E.

Получается, что любой xn, у которого n > N, а их бесконечно много, будет находиться в окрестности числа xm. Вне этой окрестности будет находиться от 0 до N предыдущих членов, то есть конечное количество членов, а значит, среди них можно найти максимальное и минимальное, что и будет являться границами всей последовательности.

**Критерий Коши, док-во (на всякий случай)**

Чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной

Необходимо: если последовательность сходится, то все ее члены начиная N-го будут находиться в окрестности U(a, E).Но это же означает, что расстояние от каждого члена, идущего после N-го, до этого N-го члена будет меньше 2E, а так как 2Е – это любое положительное число, то данная последовательность будет фундаментальной

Достаточно: если последовательность фундаментальна, то она ограничена. Если она ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса в ней можно выделить подпоследовательность xk, сходящуюся к числу а. Возьмем любое положительное число E и поделим его на 2. Получим E/2 – тоже положительное число, которое может быть любым. Также отметим, что если числа принадлежат окрестности какого-либо числа b U(b, E/2), то они будут принадлежать и окрестности U(b, E). Для E/2 начиная с какого-то номера все следующие члены подпоследовательности xk будут лежать в окрестности U(a, E/2). Выберем для этого же числа Е/2 номер N, начиная с которого, исходя из фундаментальности, для всех следующих членов последовательности будет выполняться

|xn - xm| < E/2, xn > N, xm > N.

Раскроем модуль:

xm – E/2 < xn < xm + E/2

То есть начиная с N все следующие члены xn­ будут находиться в окрестности U(xm, E/2). Членов подпоследовательности xk бесконечно много, поэтому среди них точно найдутся члены, идущие после N. Значит, все члены подпоследовательности xk начиная с N-го должны находиться и в U(a, E/2), и в U(xm, E/2). Другими словами, эти окрестности пересекутся, а для этого расстояние от члена xm до числа а должно быть не больше 2\*Е\2 = E, то есть xm будет принадлежать окрестности U(a, E). Упростим вышесказанное: для любого положительного числа Е найдется номер N, начиная с которого все следующие члены xm будут находиться в окрестности U(a, E) – это определение сходимости.

**5**

**Определение предела функции по Коши**

Число а называется пределом функции f(x) в точке x0, в окрестности которой также определена эта функция, если для любого положительного числа E найдется такое положительное число δ, что при всех x, лежащих в проколотой окрестности U’(x0, δ), f(x) будет лежать в окрестности U(a, E)

**Определение предела функции по Гейне**

Число а называется пределом функции f(x) в точке x0, в окрестности которой также определена эта функция, если при любой последовательности xn, стремящейся к x0, но никогда ее не достигающей, последовательность f(xn) будет стремиться к а

**Эквивалентность определений предела функции по Коши и Гейне, док-во**

Из Коши следует Гейне: зададим любую окрестность U(a, E) и соответствующую проколотую окрестность U’(x0, δ) и выделим в ней последовательность xn, сходящуюся к x0. Так как f(x) будут лежать в окрестности U(a, E), то и f(xn) будут лежать в этой окрестности. При уменьшении E будет уменьшаться и δ. Упрощая вышесказанное, всегда можно составить {xn}, которая будет стремиться к x0, но не достигнет ее, и при которой f(xn) будет стремиться к а – это определение по Гейне

Из Гейне следует Коши: предположим, что определение по Коши не выполняется, то есть найдется такое положительное Е, при котором при любом положительном δ найдется такой x, что 0<|x-x0|<δ и |f(x)-a| ≥ E. Если δ может быть любым, то пусть δ будет членом последовательности 1/n. Тогда по нашему предположению для каждого δ=1/n найдется соответствующий x (так как для каждого δ=1/n х будет разным, то х будет принадлежать некой последовательности {xn}). По нашему предположению при этом xn должно выполняться следующее:

0<|x-x0|<δ

x = xn

δ = 1/n

0<|xn- x0|<1/n

|xn- x0|<1/n, xn ≠ x0

x0 – 1/n < xn < x0 + 1/n

По теореме о пределе встречных последовательностей раз левая и правая часть стремится к x0, то и {xn}стремится к x0. Но раз эта последовательность стремится к x0, по определению Гейне f(xn) стремится к a, то есть |f(xn) - a| < E, при любом положительном Е, включая выбранный, а это противоречит нашему предположению. То есть какое бы положительное Е мы не брали, для него всегда будет выполняться определение Коши

**Примеры вычисления предела функции**

**6**

**Теорема об ограниченной функции, имеющей предел, док-во**

Функция, имеющая конечный предел в точке а, ограничена при х∈U’(x0, δ)

Док-во: по определению Коши при всех х∈U’(x0, δ) f(x) будет находиться в окрестности U(a, E) – ограниченном полуинтервале

**Теорема о представлении функции, имеющей конечной предел, в виде суммы предела и бесконечно малой функции**

Необходимо: , зададим и найдем ее предел:

Получается, что при .Выразим – что требовалось доказать

Достаточно: , значит, . Из этого в свою очередь следует, что . По определению Коши для можно найти любое положительное Е, для которого найдется такое положительное δ, что при всех x∈U’(x­0, δ) , то есть ; ; – следовательно, f(x) стремится к а при х→x0

**7**

**Теорема 1, док-во**

Если f(x)≤g(x)≤h(x), все функции определены в U’(x0), а f(x) и h(x) стремятся к конечному А при х→x0, то g(x) тоже стремится к А при х→x0

Док-во: зададим любое положительное Е. Для f(x) найдется такое положительное δ1, что при х∈U’(x0, δ1) A-E<f(x)<A+E. Так же для этого же Е найдется положительное δ2, что при х∈U’(x0, δ2) A-E<h(x)<A+E. Заменим δ1 и δ2 на меньший из них, Е все так же будет подходить, ведь при сужении окрестности чисел х, окрестность чисел f(x) либо остается той же, либо также сужается, и в любом случае новая окрестность чисел f(x) входит в исходную окрестность для этих чисел. Получаем:

A-E<f(x)≤g(x)≤h(x)<A+E, х∈U’(x0, δ)

A-E≤g(x)<A+E, х∈U’(x0, δ)

Последняя запись доказывает то, что требовалось

**Теорема 2, док-во**

Если при х→x0 f(x) стремится к А, g(x) стремится к В, А<B, то существует окрестность U’(x0), что при х∈U’(x0) f(x)<g(x)

Док-во: возьмем такой положительный Е, при котором окрестности А и В не будут пересекаться. Тогда A-E<f(x)<A+E, g(x)<A-E или g(x)>A+E, но так как B>A, f(x)<A+E<g(x), f(x)<g(x)

**Теорема 3, док-во**

Если f(x)≤g(x), определены в U’(x0), при х→x0 f(x) стремится к А, а g(x) стремится к В, тогда А≤В

Док-во: для f(x) = g (x): если значения функций всегда совпадают, то в запись f(x)∈U(A) можно заменить на g(x)∈U(A) (аналогично с U(B)). Тогда при любом положительном Е g(x) будет лежать и в U(B, E), и в U(A, E) (аналогично с f(x)). Так как предел может быть лишь один, A = B

Для f(x) < g(x): логично будет сказать, что если f(x) находится в окрестности U(A, E), то и А будет находиться в окрестности U(f(x), E), аналогично с g(x) и B. Выберем положительный Е < (B-A)/4. При таком Е окрестности U(A, E) и U(B, E) не будут пересекаться. Как сказано ранее, если f(x)∈U(A, E) и g(x)∈U(B, E), то A∈U(f(x), E) и B∈U(g(x), E). Две последние окрестности тоже не будут пересекаться (в этом можно убедиться, изобразив график). Формально получаем:

|A-f(x)| < E

f(x) - E < A < f(x) + E

B > f(x) + E или B < f(x) - E

Но так как g(x) > f(x), то B > f(x) + E > A

A < B

**8**

**Свойство 1, док-во**

Если f(x) ограничена при х∈U’(x0), а α(x)->0 при х->x0, то f(x)\*α(x)->0 при x->x0

Док-во: по условию |f(x)| < M (1) при х∈U’(x0, δ1) , где М – положительное число, а |α(x)| < E/M ≤ E (2) х∈U’(x0, δ2). Пусть δ – минимальный из δ1 и δ2, тогда им можно заменить δ1 и δ2. Так как в (1) и (2) присутствуют только положительные числа, мы можем перемножить их:

|f(x)|\*|α(x)| < M \* E/M

|f(x)\* α(x)| < E, х∈U’(x0, δ)

**Свойство 2, док-во**

Если α(x)->0 и β(x)->0, то (α(x) + β(x)) -> 0

Док-во: по условию |α(x)| < E/2 ≤ E (1) при х∈U’(x0, δ1), а |β(x)| < E/2 ≤ E (2) при х∈U’(x0, δ2). Заменим δ1 и δ2 на δ– минимальный из них. Сложим (1) и (2):

|α(x)| + |β(x)| < E/2 + E/2

|α(x)| + |β(x)| < E

|α(x) + β(x)| ≤ |α(x)| + |β(x)| < E

|α(x) + β(x)| < E при х∈U’(x0, δ)

**Теорема о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями, док-во**

Если α(x) – бесконечно малая тогда и только тогда, когда 1/α(x) – бесконечно большая

Док-во: возьмем любое положительное число Е и поделим 1 на него – получим 1\Е – тоже положительное число, которое может быть любым. Тогда по определению

**9**

Для , , ,

Док-во:

f(x) -> A⬄ f(x) = A + α(x), α(x) – бесконечно малая

g(x) -> B⬄ f(x) = B + β (x), β(x) – бесконечно малая

f(x) ± g(x) = A + α(x) ± (B + β(x))

f(x) ± g(x) = (A ± B) + (α(x) ± β(x)) ⬄ (f(x) ± g(x)) -> (A ± B), α(x) ± β(x) – бесконечно малая (свойство доказано выше)

Док-во:

f(x)\*g(x) = (A + α(x))\*( B + β(x)) = A\*B + A\*β(x) + B\*α(x) + α(x)\*β(x)

α(x) и β(x) – бесконечно малые. Если воспринимать А и В как функции, у которых все значения равны А и В соответственно, то такие функции являются ограниченными, поэтому A\*β(x) и B\*α(x) – бесконечно малые. (На всякий случай докажем, что α(x)\*β(x) – тоже бесконечно малая:

0 < |α(x)| < E

0 < |α(x)|\*|β(x)| < E\*|β(x)|

0 < |α(x)\*β(x)| < E\*|β(x)|

0 < α(x)\*β(x) < E\*|β(x)| (1)

Так как Е тоже какое-то конкретное число, его также можно представить в виде ограниченной функции, все значения которой равны Е, а это значит, что E\*|β(x)| – тоже бесконечно малая. Выражение (1) слева и справа стремится к 0, значит, середина тоже стремится к нулю). Раз A\*β(x) + B\*α(x) + α(x)\*β(x) – бесконечно малая, то получается, что f(x)\*g(x) -> A\*B

Док-во:

Bα(x) – Aβ(x) – бесконечно малая. B2 + Bβ(x) – функция, имеющая предел в B2, а значит, при x -> x0 она будет ограничена. Пусть γ = B2 + Bβ(x), тогда:

|γ(x) – B2| < E

A – E < γ(x) < A + E

1/(A – E) > 1/γ(x) > 1/(A + E)

То есть если γ(x) ∈ (A – E; A + E), то 1/γ(x) ∈ (1/(A + E); 1/(A – E)). Значит, 1/γ(x) – тоже ограничена. Итак, в (1) во втором слагаемом бесконечно малое умножается на ограниченное, в итоге получается бесконечно малое, а значит f(x)/g(x) -> A/B

Док-во: C\*f(x) = C\*A + C\*α(x), C\*α(x) – бесконечно малая, значит, C\*f(x) -> C\*A

**10**

**Первый замечательный предел, док-во**

Док-во: изобразим единичную окружность

РА

О

В

А

х

Наглядно видно, что SOBA < S(OBA) < SOPA (S(OBA) – площадь сектора)

SOBA = 0.5\*OA\*OB\*sinx = 0.5\*1\*1\*sinx = 0.5sinx, так как в единичной окружности радиус равен 1

S(OBA) = πr2\*(x/2π) = 0.5xr2= 0.5x

SOPA = 0.5\*OA\*AP = 0.5\*1\*AP = 0.5\*AP/1 = 0.5\*AP/OA = 0.5tgx

Получаем 0.5sinx < 0.5x < 0.5tgx

sinx < x < tgx | : sinx

1 < x/sinx < 1/cosx (1)

1/cosx -> 1, x -> 0

В (1) левая и правая часть стремится к 1, значит, x/sinx тоже стремится к 1 при x -> 0

**Примеры применения**

**11 (1)**

**Второй замечательный предел, док-во**

Док-во:

[x] -> ∞ при x -> ∞

Известно, что , а так как [x] ∈ N, то становится видно, что левая и правая часть стремится к е, значит, середина тоже стремится к е

**Примеры применения**

Второй замечательный предел используется при раскрытии неопределенности вида 1∞

**11 (2)**

**Определение непрерывной функции**

f(x) называется непрерывной в точке x0, если она определена в окрестности (не выколотой) этой точки, а ее предел в этой точке определен равен f(x0)

f(x) называется непрерывной в точке x0, если она определена в окрестности этой точки и , где ∆x = x – x0, ∆f(x) = f(x) – f(x0) = f(x0 + ∆x) – f(x0)

**Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух функций, док-во**

Сумма, произведение или частное функций, непрерывных в точке а – тоже функция, непрерывная в точке а

Док-во: пусть f(x) и g(x) – непрерывны в а, тогда и . Тогда

**Теорема о непрерывности сложной функции, док-во**

Пусть f(x) непрерывна в а, t = f(a), g(x) непрерывна в t, тогда g(f(x)) непрерывна в а

Док-во: так как g(x) непрерывна в t, то при E > 0 найдется такой σ > 0, что при x ∈ U(t, σ) g(x) ∈ U(t, E). Так как f(x) непрерывна в а, то при σ > 0 найдется такой δ > 0, что при x ∈ U(t, δ) f(x) ∈ U(a, σ). Таким образом, при E > 0 найдется такой δ > 0, что при x ∈ U(a, δ) g(f(x)) ∈ U(g(f(a)), E)

**Теорема о непрерывности элементарных функций, док-во**

Элементарные функции непрерывны на всей области их определения

Док-во: пусть f(x) – основная элементарная функция, а x0 принадлежит области определения функции. Тогда

Элементарные функции составлены из основных элементарных функций, непрерывность которых доказана, с помощью арифметических операций и операций композиции, теоремы о непрерывности которых были доказаны ранее. Значит, элементарные функции непрерывны на области их определения

**12**

**Односторонние пределы функции**

Число А называется пределом f(x) справа (слева) в точке x0, если при любом E > 0 найдется такой δ > 0, что при всех x ∈ (x0, x0 + δ) (x ∈ (x0 – δ, x0)) f(x) ∈ U(A, E)

**Точки разрыва**

x0 называется точкой устранимого разрыва f(x), если для нее выполняются все условия непрерывности, кроме одного из следующих:

f(x) не определена в x0

Предел f(x) в точке x0 не равен f(x0)

x0 называется точкой разрыва первого рода, если функция имеет конечные односторонние пределы в точке x0, но они не совпадают

x0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один односторонний предел функции в x0 не существует либо равен бесконечности

**Примеры**

x = 0 – точка устранимого разрыва функции x/sinx

x = 0 – точка разрыва первого рода функции arctg(1/x)

x = 0 – точка разрыва второго рода функции 1/x

**13**

**Сравнение бесконечно малых функций**

Пусть α(x) и β(x) стремятся к нулю при x -> x0, тогда возможны следующие случаи

α(x) и β(x) называются эквивалентными, если предел их отношения равен 1

α(x) называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β(x), если предел α(x)/β(x) равен 0

В других случаях, когда предел их отношения равен другому конечному числу, α(x) и β(x) называются бесконечно малыми одного порядка

**Основные формулы таблицы эквивалентных бесконечно малых, док-во**

Во всех формулах x -> 0

, так как

, так как

, так как

, так как

, так как

, так как

, так как

, так как

, так как

**Сравнение бесконечно больших функций**

Все аналогично бесконечно малым

**Примеры**

**14**

**Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке**

Если f(x) непрерывна на [a; b], то она ограничена и достигает своих верхней и нижней граней на этой отрезке

**15**

**Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции**

Если f(x) непрерывна на [a; b], f(a) = A, f(b) = B, C находится между А и В, то найдется точка с из этого отрезка такая, что f(c) = C

**Геометрическая интерпретация**

С

В

А

**16**

**Определение производной**

Пусть f(x) определена в окрестности точки x0, тогда f'(x) называют первой производной или производной первого порядка функции f(x) и

**Геометрический смысл производной**

f'(x0) – тангенс касательной к графику в точке x0

**Физический смысл производной**

f'(x) – скорость изменения переменной у по отношению к изменению аргумента х

**Уравнения касательной и нормали к кривой**

Так как f'(x) = tg α, где α – угол наклона касательной, то f'н(x) = tg(α+90°) – тангенс угла наклона нормали, f'н(x) = tg(α+90°) = -1/tg α = -1/f'(x)

**17**

**Определение дифференцируемой функции**

f(x) дифференцируема в точке x0, если

**Теорема о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции, док-во**

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой же точке

Док-во: из дифференцирования следует, что

, а значит,

**Примеры**

**18**

**Основные правила дифференцирования, док-во**

Пусть f(x) и g(x) – дифференцируемы, C – константа

(C)' = 0

Док-во: Δy всегда равен 0, поэтому угол наклона графика всегда равен 0, как и тангенс этого угла, а значит, и производная

(C\*f(x))' = C\*f'(x)

Док-во:

(f(x) ± g(x))' = f'(x) ± g'(x)

Док-во:

(f(x)\*g(x))' = f'(x)\*g(x) + f(x)\*g'(x)

Док-во:

Аналогично с Δg(x)

(f(x)/g(x))' = (f'(x)\*g(x) - f(x)\*g'(x))/(g2(x))

Док-во:

**Теорема о производной сложной функции, док-во**

(f(g(x)))' = f'(g(x))\*g'(x)

Док-во: y = f(u), u = g(x)

**Примеры**

y = 5, y’ = 0

y = 5x, y’ = 5 \* (x)’ = 5 \* 1 = 5

y = x + x, y’ = (x + x)’ = x’ + x’ = 1 + 1 = 2

y = x \* x, y’ = (x)’ \* x + x \* (x)’ = 1 \* x + x \* 1 = x + x = 2x

y = x / sin x, y’ = ((x)’ sin x – x (sin x)’) / sin2 x = (sin x – x cos x) / sin2 x

y = sin(cos x), y’ = sin’(cos x) cos’ x = cos(cos x)(– sin x) = –cos(cos x) sin x

**19**

**Теорема о производной обратной функции, док-во**

Если f(x) непрерывна и строго монотонна в U(x0) и f'(x0) ≠ 0, то (f-1(y0))' = 1\f'(x0), y0 = f(x0)

Док-во: так как f(x) строго монотонна, то при Δy -> 0 Δx -> 0

**Формула производных первого и второго порядков функции, заданной параметрическими уравнениями**

Так как dx мы считаем за константу, ее можно выносить из дифференциала

**Примеры вычисления производной неявной функции**

**20**

**Дифференциал функции**

Если функция дифференцируема в точке x0, то dy = f'(x0)\*Δx называется дифференциалом этой функции в точке x0

**Геометрический смысл дифференциала**

Δy

x0

dy

E(Δx)

Δx=dx

По сути, dy – примерное приращение y, а E(Δx) – погрешность (E(Δx) -> 0, Δx -> 0)

**Формула применения дифференциала в приближенных вычислениях**

**Инвариантность формы дифференциала первого порядка, док-во**

Пусть тогда

**Дифференциал n-го порядка**

– дифференицал первого порядка

– дифференциал второго порядка (учитывая, что dx = const)

– дифференциал третьего порядка

…

– дифференциал n-го порядка

**21**

**Теорема Ферма, док-во**

Пусть f(x) определена в U(x0), x0 – точка экстремума, f(x) дифференцируема в x0, тогда f'(x0) = 0

Док-во: будем считать, что x0 – точка максимума (для точки минимума следующие рассуждения будут аналогичны). Тогда

f(x0)

x0

f(x)

x

**Теорема Ролля, док-во**

Если f(x) ограничена и непрерывна на [a; b], дифференцируема на (a; b) и f(a) = f(b), то на (a; b) найдется x0, при котором f'(x0) = 0

Док-во: по теореме Вейерштрасса функция достигает своих наибольших и наименьших значений. Пусть m – минимальное значение, а M – максимальное

Если f(a) = f(b) = m = M, то для любого х из этого отрезка справедливо

Производная от константы равна 0

Если m или M достигается не на границе отрезка. Тогда точка, в которой будет достигаться максимум или минимум, будет являться точкой экстремума, и по теореме Ферма производная в этой точке будет равняться 0

**Геометрические интерпретации теорем**

**Примеры функций, показывающих обоснованность всех условий теоремы Ролля**

*f'(0) не существует*

**22**

**Теорема Лагранжа, док-во**

Если f(x) определена и непрерывна на [a; b] и дифференцируема на (a; b), то на (a; b) найдется такая точка x0, что производная в этой точке будет равняться

Док-во: введем вспомогательную функцию F(x) = f(x) - λx, где λ – конечное число. F(x) удовлетворяет 2-м условиям теорема Ролля – непрерывность и дифференцируемость. Чтобы выполнялось 3-е условие теоремы Ролля, скажем, что F(a) = F(b)

Все условия теоремы Ролля соблюдена, значит, в какой-то x0 из (a; b) F'(x0) = 0

**Геометрическая интерпретация**

y = kx + m

y = kx + n

x0

b

a

**Примеры функций, показывающих обоснованность всех условий теоремы Лагранжа**

*f'(0) не существует*

**Теорема Коши для двух функций**

Пусть f(x) и g(x) соблюдают условия теоремы Лагранжа и g'(x) ≠ 0 на (a; b), тогда на (a; b) есть такая точка x0, что

**23**

**Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**

Если f(x) имеет производную n-го порядка в точке а, то

**Формула остаточного члена в форме Лагранжа**

При условии, что f(x) имеет производную n+1-го порядка

θ – число, большее 0 и меньшее 1

**24**

**Формула Маклорена**

**Разложение**

Чтобы посчитать примерное значение e1 = e, выберем абсолютную погрешность, не большую 0,001. Тогда |Rn(1)| < 0.001

**25**

**26**

**27**

**Правило Лопиталя-Бернулли, док-во**

Если f(x) и g(x) определены и дифференцируемы в выколотой окрестности точки а, g'(x) ≠ 0 в этой выколотой окрестности, и существует , то

Док-во: для : так как , то либо f(a) = 0 и g(a) = 0, либо а – точка устранимого разрыва для обеих функций. Доопределим для второго случая обе функции: f(a) = 0 и g(a) = 0. Тогда . На отрезке [a; x] (либо [x; a], в зависимости, какое число больше) выполняются все условия теоремы Коши для двух функций, из которой следует, что . Если x -> a, то и s -> a, поэтому

(Как я понимаю, доопределять функции мы можем потому, что нас интересует лишь окрестность точки, а не она сама. А в функциях до доопределения и после него окрестность не меняется)

Для :

**28**

**Условие монотонности функции, док-во**

Чтобы f(x), дифференцируемая на (a; b), была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы f'(x) ≥ 0 (f'(x) ≤ 0), x ∈ (a; b)

Док-во: рассмотрим только возрастание, так как для убывания размышления аналогичны

Необходимо:

Достаточно: . Пусть . На [x1, x2] выполняются условия теорема Лагранжа, значит, существует такой, что . f'(x) ≥ 0, x2 > x1, следовательно, f(x2) ≥ f(x1)

**Условие строгой монотонности, док-во**

Если f'(x) > 0 (f'(x) < 0), то функция строго возрастает (строго убывает)

Док-во: из доказательства достаточности условия монотонности функции выше

f'(x) > 0, x2 > x1, следовательно, f(x2) > f(x1)

(В обратную сторону условие не работает, так как, например, y = x3строго возрастает, но имеет f'(0) = 0)

**29**

**Определение точек экстремума функции**

Если существует такая выколотая окрестность точки a, что при всех х, принадлежащих выколотой окрестности точки a, f(x) < f(a) ( f(x) > f(a) ), то точка a называется точкой максимума (минимума). Точки максимума и точки минимума называются точкой экстремума.

**Необходимое условие экстремума функции, док-во**

Если a – точка экстремума, то либо f'(a) = 0, либо f'(a) не существует

Док-во: если f'(a) существует, то по теореме Ферма f'(a) = 0. Но также f'(a) может и не существовать, например, f(x) = |x|, a = 0 – точка минимума, f'(a) не существует

**Критические точки**

Это точки, в которых либо производная равна 0, либо ее не существует

**Примеры**

f(x) = |x|, a = 0 – критическая точка, точка экстремума (минимума)

f(x) = -x2, a = 0 – критическая точка, точка экстремума (максимума)

f(x) = x3, a = 0 – критическая точка

**30**

**Достаточное условие экстремума через производную первого порядка, док-во**

Если f(x) непрерывна в U(a), дифференцируема в U'(a) и a – критическая точка, то

1. Если f'(x) < 0 при x < a и f'(x) > 0 при x > a, то a – точка минимума
2. Если f'(x) > 0 при x < a и f'(x) < 0 при x > a, то a – точка максимума
3. Если f'(x) сохраняет свой знак в U'(a), то а не является точкой экстремума

Док-во: пусть x1 < a и x2 > a. Тогда на [x1; a] и [a; x2] выполняются условия теоремы Лагранжа. Значит, найдутся s1 ∈ (x1; a) и s2 ∈ (a; x2) такие, что f(a) – f(x1) = f'(s1)(a – x1) и f(x2) – f(a) = = f'(s2)(x2 – a). Тогда при

1. f'(s1) < 0, (a – x1) > 0 => f(a) < f(x1)

f'(s2) > 0, (x2 – a) > 0 => f(x2) > f(a)

a – точка минимума

1. f'(s1) > 0, (a – x1) > 0 => f(a) > f(x1)

f'(s2) < 0, (x2 – a) > 0 => f(x2) < f(a)

a – точка максимума

1. допустим, f'(s1) > 0 и f'(s2) > 0

(a – x1) > 0, (x2 – a) > 0

f(a) > f(x1), f(x2) > f(a)

f(x1) < f(a) < f(x2)

a не является ни точкой максимума, ни точкой минимума

аналогично для отрицательных f'(s1) и f'(s2)

**Достаточное условие экстремума функции через производные высших порядков, док-во**

Пусть f(x) имеет в a все производные до n-го порядка включительно, причем f'(a) = f''(a) = = f'''(a) = … = f(n-1)(a) = 0, f(n)(a) ≠ 0, тогда если

1. n – четный, то a – точка экстремума, причем если
   1. f(n)(a)> 0, a – точка минимума
   2. f(n)(a)< 0, a – точка максимума
2. n – нечетный, то a не является точкой экстремума

Док-во: разложим f(x) по формуле Тейлора

При x, достаточно близком к a, знак Δy совпадает со знаком

1. если n – четный, то
   1. если f(n)(a)> 0, то Δy > 0, то есть f(x) > f(a), a – точка минимума
   2. если f(n)(a)< 0, то Δy < 0, то есть f(x) < f(a), a – точка максимума
2. если n – нечетный, то меняет свой знак и a не является точкой экстремума

**31**

**Основные определения, связанные с выпуклыми функциями**

График f(x), дифференцируемой на (a; b), называется выпуклым вниз или вогнутым вверх на (a; b), если дуга графика на (a; b) находится не ниже любой касательной, проведенной к любой точке из (a; b). Функция так же называется выпуклой вниз или вогнутой вверх.

Если дуга графика на (a; b) находится строго выше любой касательной, проведенной к любой точке из (a; b), то график и функция называются строго выпуклыми вниз или строго вогнутыми вверх.

Аналогично для выпуклого вверх графика

**Достаточное условие выпуклости функции**

Чтобы дважды дифференцируемая в (a; b) функция была вогнута вверх на (a; b), необходимо и достаточно, чтобы f''(x) ≥ 0. Аналогично для вогнутой вниз.

**32**

**Определение точки перегиба функции**

Если f(x) непрерывна на (a; b), f'(x0) существует и при переходе аргумента x через x0 функция меняет направление выпуклости, то x0 называется точкой перегиба

**Необходимое условие для точек перегиба функции**

Если x0 – точка перегиба функции f(x) и эта функция дважды дифференцируема в окрестности точки x0, то f''(x0) = 0

**Первое достаточное условие для точек перегиба функции**

Если функция дифференцируема в окрестности точки x0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x0 и f''(x) меняет знак при переходе аргумента x через x0, то x0 – точка перегиба

**Второе достаточное условие для точек перегиба функции, док-во**

Если f''(x0) = 0 и f'''(x0) ≠ 0, то x0 – точка перегиба f(x)

Док-во: раз f'''(x0) ≠ 0, то либо f'''(x0) > 0 и f''(x0) строго возрастает, либо f'''(x0) < 0 и f''(x0) строго убывает. В любом случае с одной стороны от x0 x будет больше нуля, а с другой – меньше, что удовлетворяет первое достаточное условие для точки перегиба

**33**

**Определение асимптоты**

Если для f(x) существует такая прямая, что расстояние от точки графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точки графика от начала координат, то такая прямая называется асимптотой.

Формально:

**Условие существование наклонной асимптоты, док-во**

y = kx + b является асимптотой при x -> ∞ тогда и только тогда, когда и

Док-во: необходимо: из определения

Тогда

Достаточно:

**Примеры**